УДК 517.5

А.С. Сердюк (Інститут математики НАН України, Київ)
У.З. Грабова (Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк)
A.S. Serdyuk (Institute of Mathematics of The National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev)
U.Z. Grabova (Lesja Ukrainka East European National University, Lutsk)

Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів (ψ, β) – диференційовних функцій

Order estimation of the best approximations and of the approximations by Fourier sums of classes of (ψ, β)–differentiable functions

Встановлено точні за порядком оцінки найкращих рівномірних наближень тригонометричними поліномами на класах $C^{\psi}_{\beta,p}$ — 2π–періодичних неперервних функцій f, які зображуються згортками функцій, що належать одиничним кулям просторів L_p, $1 \le p < \infty$, з фіксованими твірними ядрами $\Psi_\beta \subset L_{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, коефіцієнти Фур'є яких спадають до нуля приблизно як степеневі функції. Точні порядкові оцінки найкращих наближень встановлено також і в L_p–метриці, $1 < p \le \infty$, для класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ — 2π–періодичних функцій f еквівалентних відносно міри Лебега до згорток ядер $\Psi_\beta \subset L_p$ із функціями з одиничної кулі простору L_1. Показано, що в усіх розглядуваних випадках порядки найкращих наближень реалізують суми Фур'є.

There were established the exact–order estimations of the best uniform approximations by the trigonometrical polynoms on the $C^{\psi}_{\beta,p}$ classes of 2π–periodic continuous functions f, which are defined by the convolutions of the functions, which belong to the unit ball in L_p, $1 \le p < \infty$ spaces with generating fixed kernels $\Psi_\beta \subset L_{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, whose Fourier coefficients decreasing to zero approximately as power functions. The exact order estimations were also established in L_p–metrics, $1 < p \le \infty$ for $L^{\psi}_{\beta,1}$ classes of 2π–periodic functions f, which are equivalent by means of Lebesque measure to the convolutions of $\Psi_\beta \subset L_p$ kernels with the functions that belong to the unit ball in L_1 space. We showed that in investigating cases the orders of best approximations are realized by Fourier sums.

Нехай L_p, $1 \le p \le \infty$, — простір 2π–періодичних сумовних функцій f зі скінченною нормою $\|f\|_p$, де при $p \in [1, \infty)$ $\|f\|_p = \Big(\int\limits_0^{2\pi} |f(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}$, а при $p = \infty$ $\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}\limits_t |f(t)|$, C — простір 2π–періодичних неперервних функцій, у якому норма задається рівністю $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$.

Нехай, далі $L^\psi_{\beta,p}$ — клас 2π–періодичних функцій $f(x)$, котрі майже для всіх $x \in \mathbb{R}$ представляються згортками

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi_\beta(x-t)\varphi(t)dt,\ a_0 \in \mathbb{R},\ \varphi \perp 1, \tag{1}$$

де $\|\varphi\|_p \le 1$, $1 \le p \le \infty$, $\Psi_\beta(t)$ — сумовна на $(0, 2\pi)$ функція, ряд Фур'є якої має вигляд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\big),\ \psi(k) > 0,\ \beta \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Функцію φ в зображенні (1), згідно з О.І. Степанцем [1, с. 132], називають (ψ, β)–похідною функції f і позначають через f^ψ_β.

При $\psi(k) = k^{-r}$ класи $L^\psi_{\beta,p}$ перетворюються у відомі класи Вейля–Надя $W^r_{\beta,p}$, а їх (ψ, β)–похідні f^ψ_β майже скрізь співпадають з похідними в сенсі Вейля–Надя f^r_β, останні при $r = \beta$, $r \in \mathbb{N}$ майже скрізь збігаються зі звичайними r–ми похідними функції f.

Якщо твірне ядро Ψ_β класу $L^\psi_{\beta,p}$ задовольняє включенню $\Psi_\beta \in L_{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, то $L^\psi_{\beta,p} \subset L_\infty$, $1 \le p \le \infty$, а згортки виду (1) є неперервними функціями (див. твердження 3.8.1 роботи [1, с. 137]). Тому клас усіх функцій f виду (1), для яких $\|\varphi\|_p \le 1$, $\Psi_\beta \in L_{p'}$ будемо позначати через $C^\psi_{\beta,p}$.

У випадку, якщо $\Psi_\beta \in L_p$, $1 \le p \le \infty$, то (див., наприклад, [2, с. 71]) має місце включення $L^\psi_{\beta,1} \subset L_p$.

В даній роботі розглядається задача про знаходження точних порядкових оцінок функціональних класів $L^\psi_{\beta,p}$ та $L^\psi_{\beta,1}$ сумами Фур'є $S_{n-1}(t)$ порядку $n-1$ у метриках L_∞ та L_p відповідно

$$\mathcal{E}_n(L^\psi_{\beta,p})_{L_\infty} = \sup_{f \in L^\psi_{\beta,p}} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f; \cdot)\|_\infty,\ \ 1 \le p < \infty, \tag{3}$$

$$\mathcal{E}_n(L^\psi_{\beta,1})_{L_p} = \sup_{f \in L^\psi_{\beta,1}} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f; \cdot)\|_p,\ \ 1 < p \le \infty, \tag{4}$$

а також задача про знаходження точних порядкових оцінок найкращих наближень класів $L^\psi_{\beta,p}$ та $L^\psi_{\beta,1}$ в метриках L_∞ та L_p відповідно

$$E_n(L^\psi_{\beta,p})_{L_\infty} = \sup_{f \in L^\psi_{\beta,p}} \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_\infty,\ \ 1 \le p < \infty, \tag{5}$$

$$E_n(L^\psi_{\beta,1})_{L_p} = \sup_{f \in L^\psi_{\beta,1}} \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_p,\ \ 1 < p \le \infty, \tag{6}$$

де $\mathcal{T}_{2n-1}$ — підпростір усіх тригонометричних поліномів t_{n-1} порядку не вищого за $n-1$.

Зрозуміло, що у випадку класів $C^{\psi}_{\beta,p}$ норму $\|\cdot\|_{\infty}$ в (3) і (5) слід замінити на $\|\cdot\|_{C}$ і при цьому $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C = \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_{L_\infty}$, $E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C = E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_{L_\infty}$.

Для класів Вейля–Надя $W^r_{\beta,p}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ точні порядкові оцінки величин (3) – (6) відомі і мають вигляд (див., наприклад, [3, с. 47–49])

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,p})_\infty \asymp n^{-r+\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad r > \frac{1}{p}, \tag{7}$$

$$E_n(W^r_{\beta,p})_\infty \asymp n^{-r+\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad r > \frac{1}{p}, \tag{8}$$

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_p \asymp n^{-r+\frac{1}{p'}}, \quad 1 < p \leq \infty, \quad r > \frac{1}{p'}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \tag{9}$$

$$E_n(W^r_{\beta,1})_p \asymp n^{-r+\frac{1}{p'}}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad r > \frac{1}{p'}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \tag{10}$$

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,p})_p \asymp n^{-r}\ln n, \quad p = 1,\infty, \quad r > 0, \quad n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}. \tag{11}$$

У формулах (7) – (11) і надалі під записом $A_n \asymp B_n$ будемо розуміти існування додатних сталих K_1 і K_2 таких, що $K_1 B_n \leq A_n \leq K_2 B_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Щодо випадку $p = 1,\infty$ зауважимо, що завдяки роботам А.М. Колмогорова [4], В.Т. Пінкевича [5], С.М. Нікольського [6], [7], А.В. Єфімова [8] та С.О. Теляковського [9] для величин $\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,\infty})_\infty$ та $\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_1$ при $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ відомі асимптотичні рівності при $n \to \infty$.

Що ж стосується найкращих наближень $E_n(W^r_{\beta,\infty})_\infty$ та $E_n(W^r_{\beta,1})_1$, то завдяки роботам Ж. Фавара [10, 11], В.К. Дзядика [12], [13], С.Б. Стєчкіна [14] та Сунь Юн–шена [15] встановлені точні значення цих величин при усіх $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Точні значення величин $\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,p})_\infty$ відомі також у випадку $p = 2$ [16].

На класах $L^{\psi}_{\beta,p}$ точні порядкові оцінки величин $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ та $E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ у випадку, коли $\psi(k)k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{s}}$ монотонно незростають і $\frac{\psi(k)}{\psi(2k)} \leq K < \infty$, $k \in \mathbb{N}$ були знайдені у роботі О.І. Степанця та О.К. Кушпеля [17] при довільних $1 < p$, $s < \infty$.

Крім того, точні порядкові оцінки величин $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ та $E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ одержані О.І. Степанцем [18, с. 48] при довільних $1 \leq p$, $s \leq \infty$ за умови $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$ (в цьому випадку $\psi(k)$ спадають до нуля не повільніше ніж члени деякої геометричної прогресії), а також при довільних $1 < p$, $s < \infty$ за умови $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$ (в зазначеному випадку $\psi(k)$ спадають до нуля швидше довільної степеневої функції, але не швидше за деяку геометричну прогресію). Згодом В.С. Романюк [19] у випадку $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$ доповнив згадані результати О.І. Степанця, встановивши точні порядки величин $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C$, $1 < p < \infty$ (для величин $E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C$ при $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$ питання про точні порядкові оцінки до цих пір залишається відкритим). Зазначимо також, що при $p = 2$ точні значення величин $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$ за умови збіжності ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi^2(k)$ знайдені у роботі А.С. Сердюка та І.В. Соколенка [20].

Задача про точні значення величин $\mathcal{E}_n(L^\psi_{\beta,2})_2$ та $E_n(L^\psi_{\beta,2})_2$ повністю розв'язана у роботі О.І. Степанця та О.К. Кушпеля [17].

При $p = 1, \infty$ результати, що містять асимптотично точні оцінки величин $\mathcal{E}_n(L^\psi_{\beta,p})_p$, а також точні порядкові оцінки величин $E_n(L^\psi_{\beta,p})_p$ в залежності від швидкості прямування до нуля послідовності $\psi(k)$ при $k \to \infty$ найбільш повно викладені в монографіях [1], [21].

В даній роботі встановлено точні порядкові оцінки величин (3)–(6) при довільних $\beta \in \mathbb{R}$ у випадку, коли послідовність $\psi(k)$ спадає до нуля не повільніше і не швидше деяких степеневих функцій. Тим самим доповнено основні результати роботи [17] по відшуканню слабкої асимптотики величин $\mathcal{E}_n(L^\psi_{\beta,p})_s$ та $E_n(L^\psi_{\beta,p})_s$ на випадки $p = 1$ і $s = \infty$.

Перейдемо до точних формулювань.

Вважаючи, що послідовність $\psi(k)$, що визначає клас $C^\psi_{\beta,p}$, є слідом на множині $\mathbb{N}$ деякої неперервної функції $\psi(t)$ неперервного аргументу $t \geq 1$, позначимо через Θ_p, $1 \leq p < \infty$, множину монотонно незростаючих функцій $\psi(t)$, для яких існує стала $\alpha > \frac{1}{p}$ така, що функція $t^\alpha \psi(t)$ майже спадає, тобто знайдеться додатна стала K така, що $t_1^\alpha \psi(t_1) \leq K t_2^\alpha \psi(t_2)$ для будь–яких $t_1 > t_2 \geq 1$; через B позначимо множину монотонно незростаючих при $t \geq 1$ додатних функцій $\psi(t)$, для кожної з яких можна вказати додатну сталу K таку, що

$$\frac{\psi(t)}{\psi(2t)} \leq K, \quad \forall t \geq 1.$$

Надалі скрізь будемо вважати, що $\psi \in B \cap \Theta_p$, $1 \leq p < \infty$. Умова $\psi \in \Theta_p$, $1 \leq p < \infty$, як неважко переконатись, гарантує справедливість включення $\Psi_\beta \in L_{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (див., наприклад, [22, с. 657]). Як випливає з [1, с. 165, 175], якщо $\psi \in B \cap \mathfrak{M}$, де $\mathfrak{M}$ — множина усіх опуклих донизу на $[1, \infty)$ функцій $\psi(t)$, таких, що $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = 0$, то можна вказати таке $r > 0$, що при всіх $t \geq 1$ буде виконуватись нерівність $\psi(t) \geq K t^{-r}$.

Прикладами функцій ψ, що задовольняють умову $\psi \in B \cap \Theta_p$, є, зокрема, функції виду $\psi(t) = \frac{1}{t^r}$, $r > \frac{1}{p}$; $\psi(t) = \frac{1}{t^r \ln^\alpha(t+c)}$, $\alpha \geq 0$, $c > 0$, $r > \frac{1}{p}$, $t \geq 1$; $\psi(t) = \frac{\ln^\alpha(t+c)}{t^r}$, $\alpha \geq 0$, $c > e^{\frac{\alpha}{r}} - 1$, $r > \frac{1}{p}$, $t \geq 1$.

Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $1 < p < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\psi \in B \cap \Theta_p$. Тоді існують додатні величини $K^{(1)}_{\psi,p}$, $K^{(2)}_{\psi,p}$, що можуть залежати лише від ψ і p такі, що для довільних $n \in \mathbb{N}$*

$$K^{(2)}_{\psi,p} \psi(n) n^{\frac{1}{p}} \leq E_n\Big(C^\psi_{\beta,p}\Big)_C \leq \mathcal{E}_n\Big(C^\psi_{\beta,p}\Big)_C \leq K^{(1)}_{\psi,p} \psi(n) n^{\frac{1}{p}}. \tag{12}$$

Доведення. Для довільної функції $f \in C^\psi_{\beta,p}$, згідно з інтегральним зображенням (1), одержимо

$$f(x) - S_{n-1}(f; x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi_{\beta,n}(x - t) \varphi(t) dt, \tag{13}$$

де

$$\Psi_{\beta,n}(t)=\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\cos\big(kt-\frac{\beta\pi}{2}\big). \qquad (14)$$

Застосовуючи нерівність Гельдера, з рівності (13) маємо

$$\mathcal{E}_n\big(C^{\psi}_{\beta,p}\big)_C\le\frac{1}{\pi}\big\|\Psi_{\beta,n}(\cdot)\big\|_{p'}\|\varphi(\cdot)\|_p\le\frac{1}{\pi}\big\|\Psi_{\beta,n}(\cdot)\big\|_{p'}, \qquad (15)$$

де $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $1\le p<\infty$.

Перетворивши функцію $\Psi_{\beta,n}(t)$ за допомогою перетворення Абеля, при довільному $n\in\ \mathbb{N}$, одержимо

$$\Psi_{\beta,n}(t)=\sum_{k=n}^{\infty}\Delta\psi(k)D_{k,\beta}(t)-\psi(n)D_{n-1,\beta}(t), \qquad (16)$$

де $\triangle\psi(k)\stackrel{\mathrm{df}}{=}\psi(k)-\psi(k+1)$, а

$$D_{k,\beta}(t)=\frac{1}{2}\cos\frac{\beta\pi}{2}+\sum_{\nu=1}^{k}\cos\Big(\nu t-\frac{\beta\pi}{2}\Big)=$$

$$=\cos\frac{\beta\pi}{2}\left[\frac{\sin\frac{2k+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\right]+\sin\frac{\beta\pi}{2}\left[\frac{\cos\frac{t}{2}-\cos\frac{2k+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\right]. \qquad (17)$$

Оскільки (див., наприклад, [23, с. 13])

$$|D_{k,\beta}(t)|\le\frac{1}{2}+k,\quad |D_{k,\beta}(t)|\le(1+\pi)\Big(\frac{1}{|t|}\Big),\ 0<|t|\le\pi, \qquad (18)$$

то для будь–яких $k\in\mathbb{N}$ і $1<p'<\infty$ маємо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}|D_{k,\beta}(t)|^{p'}dt\le\int\limits_{0\le|t|\le\frac{1}{k}}(\frac{1}{2}+k)^{p'}dt+\int\limits_{\frac{1}{k}\le|t|\le\pi}(1+\pi)^{p'}\frac{dt}{|t|^{p'}}\le K_{p'}k^{p'-1}, \qquad (19)$$

де $K_{p'}$ — стала, що залежить від p'. З (18) та оцінки (19) отримаємо

$$\|D_{k,\beta}(t)\|_{p'}\le K_{p,1}k^{\frac{1}{p}},\quad k\in\mathbb{N},\quad 1\le p<\infty,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,\quad \beta\in\mathbb{R}, \qquad (20)$$

де $K_{p,1}$ — стала, що залежить від p. Із (16) та (20) випливає нерівність

$$\|\Psi_{\beta,n}(t)\|_{p'}\le K_{p,1}\big(\sum_{k=n}^{\infty}\Delta\psi(k)k^{\frac{1}{p}}+\psi(n)n^{\frac{1}{p}}\big),\quad 1\le p<\infty. \qquad (21)$$

Для оцінки суми $\sum\limits_{k=n}^{\infty}\Delta\psi(k)k^{\frac{1}{p}}$ нам буде корисним наступне твердження.

Лема 1. *Нехай $r\in(0,1]$, а $\psi(k)>0$, монотонно незростає і для неї знайдеться $\varepsilon>0$ таке, що послідовність $k^{r+\varepsilon}\psi(k)$ майже спадає. Тоді існує стала K, залежна від ψ і r така, що для довільних $n\in\mathbb{N}$*

$$\psi(n)n^r\le\sum_{k=n}^{\infty}\triangle\psi(k)k^r\le K\psi(n)n^r. \qquad (22)$$

Доведення. Оскільки $\psi(k)$ монотонно незростає, то для $\forall r>0$

$$\sum_{k=n}^{\infty}\Delta\psi(k)k^r \geq n^r\sum_{k=n}^{\infty}\Delta\psi(k)=n^r\psi(n). \tag{23}$$

Залишається показати, що за виконання умов леми 1 виконується нерівність

$$\sum_{k=n}^{\infty}\Delta\psi(k)k^r \leq K\psi(n)n^r. \tag{24}$$

Застосування перетворення Абеля дозволяє для будь–яких натуральних $n\leq M$, і довільного $r\in(0,1]$ записати рівність

$$\sum_{k=n}^{M}\psi(k)k^{r-1}=\sum_{k=n}^{M}\Delta\psi(k)\sum_{\nu=1}^{k}\frac{1}{\nu^{1-r}}-\psi(n)\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{\nu^{1-r}}+\psi(M+1)\sum_{\nu=1}^{M}\frac{1}{\nu^{1-r}}. \tag{25}$$

В силу простих геометричних міркувань неважко переконатись, що для довільних $m\in\mathbb{N}$ і $r\in(0,1]$

$$\frac{1}{r}(m^r-1)<\sum_{\nu=1}^{m}\frac{1}{\nu^{1-r}}\leq\frac{1}{r}m^r. \tag{26}$$

Тому в силу (25) і (26)

$$\sum_{k=n}^{M}\psi(k)k^{r-1}>\frac{1}{r}\Big(\sum_{k=n}^{M}\Delta\psi(k)(k^r-1)-\psi(n)(n-1)^r\Big)>$$

$$>\frac{1}{r}\Big(\sum_{k=n}^{M}\Delta\psi(k)k^r-\psi(n)\big((n-1)^r+1\big)\Big). \tag{27}$$

При $M\to\infty$ із () одержуємо

$$\sum_{k=n}^{\infty}\Delta\psi(k)k^r\leq r\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)k^{r-1}+\psi(n)\big((n-1)^r+1\big). \tag{28}$$

Оскільки за умовою леми існує $\varepsilon>0$ таке, що послідовність $k^{r+\varepsilon}\psi(k)$ майже спадає, то знайдеться стала K_1 така, що

$$\psi(k)k^{r+\varepsilon}\leq K_1\psi(n)n^{r+\varepsilon}, k=n,n+1,..., \tag{29}$$

тому

$$\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)k^{r-1}=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\psi(k)k^{r+\varepsilon}}{k^{1+\varepsilon}}\leq K_1\psi(n)n^{r+\varepsilon}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\varepsilon}}\leq K_2\psi(n)n^r. \tag{30}$$

Із (28) і (30) випливає (22). Лему доведено.

Оскільки $\psi\in\Theta_p$, то, застосувавши лему 1, при $r=\frac{1}{p}$ із (15) та (21) отримуємо нерівність

$$E_n\Big(C^{\psi}_{\beta,p}\Big)_C\leq\mathcal{E}_n\big(C^{\psi}_{\beta,p}\big)_C\leq K^{(1)}_{\psi,p}\psi(n)n^{\frac{1}{p}},\ 1\leq p<\infty, \tag{31}$$

$K^{(1)}_{\psi,p}$ — величина, що залежить від ψ і p.

Для того, щоб одержати оцінку знизу розглянемо при заданому $n\in\mathbb{N}$ функцію

$$f^*_{n,\alpha}=\frac{\alpha\psi(n)}{n^{1-\frac{1}{p}}}\Big(V_{2n}(t)-V_n(t)\Big),\ \alpha>0,\ n\in\mathbb{N},$$

де $V_m(t)$ — ядра методу Валле Пуссена

$$V_m(t)=\frac{1}{m}\sum_{k=m}^{2m-1}D_k(t),\ m\in\mathbb{N}, \tag{32}$$

$D_k(t)$ — ядра Діріхле

$$D_k(t)=\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{k}\cos\nu t=\frac{\sin\big(k+\frac{1}{2}\big)t}{2\sin\frac{t}{2}},\ k\in\mathbb{N}.$$

Покажемо, спочатку, що при певному виборі значення параметра α виконується нерівність

$$\Big\|\big(f^*_{n,\alpha}(\cdot)\big)^{\psi}_{\beta}\Big\|_p\leq 1,\ 1<p<\infty. \tag{33}$$

Для цього скористаємось наступним твердженням роботи [21, с. 117], в якій встановлено нерівності Бернштейна для (ψ,β)-похідних в L_p– метриках для поліномів, тобто нерівності між $\|(t_m)^{\psi}_{\beta}\|_p$ та $\|t_m\|_p$, де t_m — тригонометричні поліноми порядку m.

Твердження 1. *Нехай $1<p<\infty$, $\beta\in\mathbb{R}$, $\psi(k)$ — довільна незростаюча послідовність невід'ємних чисел. Тоді для довільного тригонометричного полінома $t_m(\cdot)$ порядку m знайдеться величина $C_{\psi,p}$, що може залежати тільки від функції $\psi(\cdot)$ та числа p така, що*

$$\big\|\big(t_m(\cdot)\big)^{\psi}_{\beta}\big\|_p\leq C_{\psi,p}(\psi(m))^{-1}\|t_m(\cdot)\|_p. \tag{34}$$

Оскільки $f^*_{n,\alpha}$ є тригонометричним поліномом порядку $4n-1$, то, використовуючи твердження 1, отримаємо

$$\Big\|\big(f^*_{n,\alpha}(t)\big)^{\psi}_{\beta}\Big\|_p\leq\frac{\alpha C_{\psi,p}}{n^{1-\frac{1}{p}}}\frac{\psi(n)}{\psi(4n-1)}\|V_{2n}(t)-V_n(t)\|_p. \tag{35}$$

Знайдемо оцінку $\|V_{2n}(t)-V_n(t)\|_p$. Враховуючи, що

$$V_m(t)=2F_{2m-1}(t)-F_{m-1}(t), \tag{36}$$

де $F_k(t)$ — ядра Фейєра

$$F_k(t)=\frac{1}{k+1}\sum_{\nu=0}^{k}D_\nu(t)=\frac{1}{k+1}\sum_{\nu=0}^{k}\frac{\sin\big(\nu+\frac{1}{2}\big)t}{2\sin\frac{t}{2}},\ k\in\mathbb{N}$$

і відомі оцінки для ядер Фейєра (див., наприклад, [23, с. 148–151])

$$0<F_k(t)<k+1,\ F_k(t)\leq\frac{A_1}{(k+1)t^2},\ 0<t\leq\pi,$$

одержимо наступні оцінки для $V_m(t)$:

$$|V_m(t)| < A_2 m, \quad |V_m(t)| \leq \frac{A_3}{mt^2}, \quad 0 < t \leq \pi,$$

A_i — абсолютні сталі. Тоді, при $1 \leq p < \infty$

$$\|V_{2n}(t) - V_n(t)\|_p \leq A_4 \left(\int\limits_{0 \leq |t| \leq \frac{1}{n}} n^p dt + \int\limits_{\frac{1}{n} \leq |t| \leq \pi} \frac{1}{(nt^2)^p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq A_5 n^{1-\frac{1}{p}}. \quad (37)$$

Зауважимо, що при $p = 1$ з нерівності (37) випливає оцінка

$$\|V_{2n}(t) - V_n(t)\|_1 \leq A_5. \quad (38)$$

Далі, враховуючи включення $\psi \in B$ та нерівність (37), з (35) отримуємо

$$\left\| \left(f^*_{n,\alpha}(t) \right)^{\psi}_{\beta} \right\|_p \leq \frac{\alpha \widetilde{C}_{p,\psi}}{n^{1-\frac{1}{p}}} n^{1-\frac{1}{p}} = \alpha \widetilde{C}_{p,\psi}, \quad (39)$$

$\widetilde{C}_{p,\psi}$ — величина, що залежить від ψ і p. При $\alpha = \alpha_* = (\widetilde{C}_{p,\psi})^{-1}$ з (39) випливає нерівність (33), а, отже, і включення $f^*_{n,\alpha^*} \in C^{\psi}_{\beta,p}$.

Знайдемо коефіцієнти Фур'є функції $V_{2n}(t) - V_n(t)$. Згідно з формулою (3.3.5) роботи [1, с. 31] для ядер $V_m(t)$ виконується рівність

$$V_m(t) = D_m(t) + 2 \sum_{k=m+1}^{2m-1} \left(1 - \frac{k}{2m} \right) \cos kt, \ m \in \mathbb{N}. \quad (40)$$

Застосовуючи (40) при $m = n$ і $m = 2n$, одержуємо

$$V_{2n}(t) - V_n(t) =$$

$$= D_{2n}(t) - D_n(t) - 2 \sum_{k=n+1}^{2n-1} \left(1 - \frac{k}{2n} \right) \cos kt + 2 \sum_{k=2n+1}^{4n-1} \left(1 - \frac{k}{4n} \right) \cos kt =$$

$$= - \sum_{k=n+1}^{2n} \left(1 - \frac{k}{n} \right) \cos kt + 2 \sum_{k=2n+1}^{4n-1} \left(1 - \frac{k}{4n} \right) \cos kt. \quad (41)$$

В силу рівності Парсеваля

$$\|V_{2n}(t) - V_n(t)\|_2^2 = \pi \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \left(1 - \frac{k}{n} \right)^2 + 4 \sum_{k=2n+1}^{4n-1} \left(1 - \frac{k}{4n} \right)^2 \right) =$$

$$= \frac{\pi}{n^2} \left(\sum_{k=n+1}^{2n} (n-k)^2 + \frac{1}{4} \sum_{k=2n+1}^{4n-1} (4n-k)^2 \right) = \frac{\pi}{n^2} \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{2n-1} k^2 \right) =$$

$$= \frac{\pi}{n^2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{(2n-1)2n(4n-1)}{24} \right) = \pi(n + \frac{1}{4n}). \quad (42)$$

Із () випливає, що $(V_{2n}-V_n)\perp t_{n-1}$ для будь–якого полінома $t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}$. Тому

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(f^*_{n,\alpha_*}(t)-t_{n-1}(t)\big)\big(V_{2n}(t)-V_n(t)\big)dt=\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^*_{n,\alpha_*}(t)\big(V_{2n}(t)-V_n(t)\big)dt-$$

$$-\int\limits_{-\pi}^{\pi}t_{n-1}(t)\big(V_{2n}(t)-V_n(t)\big)dt=\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^*_{n,\alpha_*}(t)\big(V_{2n}(t)-V_n(t)\big)dt=$$

$$=\frac{\alpha_*\psi(n)}{n^{1-\frac{1}{p}}}\|V_{2n}(t)-V_n(t)\|_2^2. \tag{43}$$

З іншого боку, використовуючи нерівність Гельдера та враховуючи (38), отримуємо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(f^*_{n,\alpha_*}(t)-t_{n-1}(t)\big)\big(V_{2n}(t)-V_n(t)\big)dt\leq$$

$$\leq\|f^*_{n,\alpha_*}(t)-t_{n-1}(t)\|_\infty\|V_{2n}(t)-V_n(t)\|_1\leq A_5\|f^*_{n,\alpha_*}(t)-t_{n-1}(t)\|_\infty. \tag{44}$$

Із () – () одержуємо

$$\|f^*_{n,\alpha_*}(t)-t_{n-1}(t)\|_\infty\geq\frac{\alpha_*\psi(n)}{A_5n^{1-\frac{1}{p}}}\|V_{2n}(t)-V_n(t)\|_2^2\geq\frac{K^{(2)}_{\psi,p}\psi(n)}{n^{1-\frac{1}{p}}}n=K^{(2)}_{\psi,p}\psi(n)n^{\frac{1}{p}}. \tag{45}$$

З (31) та (45) випливає (12). Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай $\beta\in\mathbb{R}$, $\psi\in B\cap\Theta_1$ і виконується одна з умов*

$$\Delta^2\big(1/\psi(k)\big)\geq 0,\quad k\in\mathbb{N} \tag{46}$$

або

$$\Delta^2\big(1/\psi(k)\big)\leq 0,\quad k\in\mathbb{N}, \tag{47}$$

де $\Delta^2\big(1/\psi(k)\big)\overset{\mathrm{df}}{=}\frac{1}{\psi(k)}-\frac{2}{\psi(k+1)}+\frac{1}{\psi(k+2)}$.

Тоді існують додатні величини $K^{(1)}_\psi$ і $K^{(2)}_\psi$, що можуть залежати лише від ψ такі, що для довільних $n\in\mathbb{N}$

$$K^{(2)}_\psi\psi(n)n\leq E_n\big(C^\psi_{\beta,1}\big)_C\leq\mathcal{E}_n\big(C^\psi_{\beta,1}\big)_C\leq K^{(1)}_\psi\psi(n)n. \tag{48}$$

Доведення. Застосувавши нерівність (31) при $p=1$ маємо

$$E_n\big(C^\psi_{\beta,1}\big)_C\leq\mathcal{E}_n\big(C^\psi_{\beta,1}\big)_C\leq K^{(1)}_\psi\psi(n)n, \tag{49}$$

де $K^{(1)}_\psi$ — величина, що залежить лише від ψ.

Для того, щоб одержати оцінку знизу, розглянемо функцію

$$f^{(1)}_{n,\alpha}(t)=\alpha\psi(n)\big(V_{2n}(t)-V_n(t)\big),\ \alpha>0,\ n\in\mathbb{N},$$

де $V_m(t)$ — ядра Валле Пуссена вигляду (32). Покажемо, що при певному виборі параметра $\alpha>0$ $f^{(1)}_{n,\alpha}\in C^\psi_{\beta,1}$. Для цього нам буде корисним твердження роботи [21, с. 120] в якому

встановлено оцінки норм нерівності Бернштейна для (ψ,β)-похідних в L_1-метриці для поліномів $t_m \in \mathcal{T}_{2m+1}$.

Твердження 2. *Нехай $\psi(k)$ — довільна незростаюча послідовність невід'ємних чисел, для яких виконується одна з умов* (46) *або* (47) *і, крім того,*

$$\Big|\sin\frac{\beta\pi}{2}\Big|\sum_{k=1}^{n-1}\psi(n)\big(k\psi(k)\big)^{-1}=O(1), \tag{50}$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по n. Тоді для довільного тригонометричного полінома $t_m(\cdot)$ порядку m знайдеться стала C_ψ, що може залежати тільки від функції від $\psi(\cdot)$, така, що

$$\big\|\big(t_m(\cdot)\big)^{\psi}_{\beta}\big\|_1 \leq C_\psi\big(\psi(m)\big)^{-1}\|t_m(\cdot)\|_1. \tag{51}$$

Зауважимо, що коли $\psi\in\Theta_p,\ 1\leq p<\infty$, то умова (50) завжди виконується, оскільки в цьому випадку існує число $\alpha>\frac{1}{p}$ таке, що послідовність $\varphi(n)=n^{-\alpha}\psi(n)$ монотонно спадна, а також

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\psi(n)}{k\psi(k)}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\varphi(n)k^{\alpha}}{n^{\alpha}\varphi(k)k}\leq\frac{K_1}{n^{\alpha}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^{\alpha}}{k}\leq K_2<\infty. \tag{52}$$

Зокрема, якщо $\psi\in\Theta_1$, то умова (50) виконується при будь-яких $\beta\in\mathbb{R}$. Зогляду на це, оскільки $f^{(1)}_{n,\alpha}(t)$ — тригонометричний поліном порядку $4n-1$, то в силу (51), з урахуванням включення $\psi\in B\cap\Theta_1$ та виконання однієї з умов (46) або (47), одержимо

$$\Big\|\big(f^{(1)}_{n,\alpha}(t)\big)^{\psi}_{\beta}\Big\|_1=\alpha\psi(n)\|\big(V_{2n}(t)-V_n(t)\big)^{\psi}_{\beta}\|_1\leq$$

$$\leq\alpha C_\psi\frac{\psi(n)}{\psi(4n-1)}\|V_{2n}(t)-V_n(t)\|_1\leq\alpha\widetilde{C}_\psi, \tag{53}$$

де $\widetilde{C}_\psi$ — величина, що залежить від ψ. При $\alpha=\alpha_1=(\widetilde{C}_\psi)^{-1}$ з () випливає, що $\Big\|\big(f^{(1)}_{n,\alpha_1}(t)\big)^{\psi}_{\beta}\Big\|_1\leq 1$.

Провівши ті ж міркування, які використовувались для знаходження оцінки (45) для функції $f^{(1)}_{n,\alpha}(t)$ одержимо нерівність

$$\|f^{(1)}_{n,\alpha_1}(t)-t_{n-1}(t)\|_\infty\geq K^{(2)}_\psi\psi(n)n, \tag{54}$$

де $K^{(2)}_\psi$ — величина, що залежить від ψ. Із (49) та (54) випливає оцінка (48). Теорему 2 доведено.

Теорема 3. *Нехай $1<p\leq\infty$, $\beta\in\mathbb{R}$, $\psi\in B\cap\Theta_{p'}$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, і виконується одна з умов* (46) *або* (47). *Тоді існують додатні величини $K^{(3)}_{\psi,p}$ і $K^{(4)}_{\psi,p}$, що можуть залежати лише від ψ і p, такі, що для довільних $n\in\mathbb{N}$*

$$K^{(4)}_{\psi,p}\psi(n)n^{\frac{1}{p'}}\leq E_n\big(L^{\psi}_{\beta,1}\big)_p\leq\mathcal{E}_n\big(L^{\psi}_{\beta,1}\big)_p\leq K^{(3)}_{\psi,p}\psi(n)n^{\frac{1}{p'}}. \tag{55}$$

Доведення. Зауважимо, що за виконання умови $\psi\in\Theta_{p'},\ 1\le p'<\infty$, твірне ядро Ψ_β класу $L^{\psi}_{\beta,1}$ задовольняє включенню $\Psi_\beta\in L_p$, $1<p\le\infty$. Тоді $L^{\psi}_{\beta,1}\subset L_p$ і, з урахуванням нерівності Юнга (див., наприклад, [1, с. 293]) та інтегрального зображення (1), маємо

$$\mathcal{E}_n\big(L^{\psi}_{\beta,1}\big)_p\le\frac{1}{\pi}\big\|\Psi_{\beta,n}(\cdot)\big\|_p\|\varphi(\cdot)\|_1\le\frac{1}{\pi}\big\|\Psi_{\beta,n}(\cdot)\big\|_p. \tag{56}$$

В силу (21)

$$\big\|\Psi_{\beta,n}(\cdot)\big\|_p\le K_{p',1}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\Delta\psi(k)k^{\frac{1}{p'}}+\psi(n)n^{\frac{1}{p'}}\Big),\ \ 1<p\le\infty,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \tag{57}$$

$K_{p,1}$ — стала, що залежить від p. Тоді, застосувавши до суми $\sum\limits_{k=n}^{\infty}\Delta\psi(k)k^{\frac{1}{p'}}$ лему 1, із (56) та (21) одержимо

$$E_n\big(L^{\psi}_{\beta,1}\big)_p\le\mathcal{E}_n\big(L^{\psi}_{\beta,1}\big)_p\le K^{(3)}_{\psi,p}\psi(n)n^{\frac{1}{p'}}. \tag{58}$$

Щоб одержати оцінку знизу величини $E_n\big(L^{\psi}_{\beta,1}\big)_p$, $1<p\le\infty$, розглянемо функцію

$$f^{(1)}_{n,\alpha}(t)=\alpha\psi(n)\big(V_{2n}(t)-V_n(t)\big),\ \ \alpha>0,\ \ n\in\mathbb{N}.$$

Як випливає з нерівності (), при певному виборі параметра $\alpha=\alpha_1$, залежного від ψ, виконуватиметься нерівність $\Big\|\big(f^{(1)}_{n,\alpha_1}(t)\big)^{\psi}_{\beta}\Big\|_1\le 1$ і, отже, $f^{(1)}_{n,\alpha_1}\in L^{\psi}_{\beta,1}$.

Оскільки $(V_{2n}-V_n)\perp t_{n-1}$ для будь-якого полінома $t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}$, то має місце рівність

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(f^{(1)}_{n,\alpha_1}(t)-t_{n-1}(t)\big)\big(V_{2n}(t)-V_n(t)\big)dt=\alpha_1\psi(n)\|V_{2n}(t)-V_n(t)\|_2^2. \tag{59}$$

З іншого боку, в силу (37)

$$\|V_{2n}(t)-V_n(t)\|_{p'}\le A_5n^{\frac{1}{p}},\ \ 1<p\le\infty,$$

і тому, застосовуючи нерівність 3.8.1 та 3.8.3 роботи [1, с. 137, 138], маємо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(f^{(1)}_{n,\alpha_1}(t)-t_{n-1}(t)\big)\big(V_{2n}(t)-V_n(t)\big)dt\le\|f^{(1)}_{n,\alpha_1}(t)-t_{n-1}(t)\|_p\|V_{2n}(t)-V_n(t)\|_{p'}\le$$

$$\le A_5n^{\frac{1}{p}}\|f^{(1)}_{n,\alpha_1}(t)-t_{n-1}(t)\|_p. \tag{60}$$

Із (59) та (), враховуючи співвідношення (), отримуємо

$$\|f^{(1)}_{n,\alpha_1}(t)-t_{n-1}(t)\|_p\ge\frac{\alpha_1\psi(n)}{A_5n^{\frac{1}{p}}}\|V_{2n}(t)-V_n(t)\|_2^2=\frac{K^{(4)}_{\psi,p}\psi(n)}{n^{\frac{1}{p}}}n=K^{(4)}_{\psi,p}\psi(n)n^{\frac{1}{p'}}. \tag{61}$$

З (58) та (61) випливає (55). Теорему 3 доведено.

Зауважимо, що в теоремах 2 і 3 вимоги виконання однієї з умов (46) та (47) можна замінити на більш загальну (але менш прозору): щоб для $\beta \in \mathbb{R}$ і для послідовності $\psi \in B \cap \Theta_1$ (у випадку теореми 2) або $\psi \in B \cap \Theta_p$ (у випадку теореми 3) виконувалась нерівність (51).

Для функцій $\psi(t) = \frac{\ln^\alpha(t+c)}{t^r}$, $\alpha \geq 1$, $c > e^{\frac{2\alpha}{r}} - 1$, $t \geq 1$ та $\psi(t) = \frac{1}{t^r \ln^\alpha(t+c)}$, $\alpha \geq 0$, $c > 0$, $t \geq 1$ виконуються всі умови теорем 2 (при $r > \frac{1}{p}$) та 3 (при $r > 1 - \frac{1}{p}$) і, отже, для величин $E_n(C^\psi_{\beta,1})_C$ та $E_n(L^\psi_{\beta,1})_p$, $1 < p \leq \infty$, мають місце співвідношення (48) та (55) відповідно.

Література

1. *Степанец А.И.* Методы теории приближений. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — **40**. — Ч.I. — 427 с.

2. *Корнейчук Н.П.* Экстремальные задачи теории приближения. — М.: Наука, 1976. — 320 с.

3. *Temlyakov V.N.* Approximation of Periodic Function: Nova Science Publi– chers, Inc. — 1993. — 419p.

4. *Kolmogoroff A.* Zur Grössennordnung des Restgliedes Fourierschen Reihen differenzierbarer Funktionen // Ann. Math.(2), — 1935. — **36**, №2. — P. 521–526.

5. *Пинкевич В.Т.* О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Вейля // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1940. — **4**, №6. — С. 521–528.

6. *Никольский С.М.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Труды МИАН СССР. — 1945. — **15**. — С. 1–76.

7. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1946. — **10**, №3. — С. 207–256.

8. *Ефимов А.В.* Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье // Изв. АН СССР Сер. мат. — 1960. — **24**, №2. — С. 243–296.

9. *Теляковский С.А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье // Труды МИАН СССР. — 1961. — **62**. — С. 61–97.

10. *Favard J.* Sur l'approximation des fonctions périodiques par des polynomes trigonométriques // C.R. Acad. Sci. — 1936. — **203**. — P. 1122–1124.

11. *Favard J.* Sur les meilleurs procédes d'approximations de certains classes de fontions par des polynomes trigonométriques // Bull. de Sci. Math. — 1937. — **61**. — P. 209–224, 243–256.

12. *Дзядык В.К.* О наилучшем приближении на классе периодических функций, имеющих ограниченную s–ю производную $(0 < s < 1)$ // Изв. АН СССР, Сер. мат. — 1953. — **17**. — С. 135–162.

13. *Дзядык В.К.* О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер // Мат. заметки. — 1974. — **16**, №5. — С. 691–701.

14. *Стечкин С.Б.* О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР, Сер. мат. — 1956. — **20**, — С. 643–648.

15. *Сунь Юн–шен* О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1959. — **23**, №1. — С. 67–92.

16. *Бабенко В.Ф., Пичугов С.А.* О наилучшем линейном приближении некоторых классов дифференцируемых периодических функций // Мат. заметки. — 1980. — **27**, №5. — С. 683–689.

17. *Степанец А.И., Кушпель А.К.* Скорость сходимости рядов Фурье и наилучшие приближения в пространстве L_p // Укр. мат. журн. — 1987. — **39**, №4. — С. 483–492.

18. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка — 1987. — 268 с.

19. *Романюк В.С.* Дополнения к оценкам приближения суммами Фурье классов бесконечно дифференцируемых функций // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. — 2003. — **46**, — С. 131–135.

20. *Сердюк А.С., Соколенко І.В.* Рівномірні наближення класів $(\psi, \overline{\beta})$–диференційовних функцій лінійними методами // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2011. — **8**, №1. — С. 181–189.

21. *Степанец А.И.* Методы теории приближений. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — **40**. — Ч.II. — 468 с.

22. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961. — 936 с.

23. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. В 2 т. — М.: Мир, 1965. — Т.I. — 615 с.